# 四庫全書

子部

欽定四庫全書

子部

曆算全書卷八

詳校官欽天監天文生臣賈德輔

靈臺郎臣倪廷梅覆勘

總校官編修臣王燕緒

校對官五官靈臺郎臣陳際新

謄録監生臣官成

繪圖監生臣劉秉仁

欽定四庫全書

曆算全書卷八

宣城梅文鼎撰

弧三角舉要卷三

斜弧三角形作垂弧說

正弧形有正角如平三角之有句股形也斜弧形無正角如平三角之有鋭鈍形也平三角鋭鈍二形並以虛線成句股故斜弧形亦以垂弧成正角也正弧形以正

弦等線立算句股法也斜弧形仍以正角立算亦句股法也

斜弧三角用垂弧法

垂弧之法有三其一作垂弧于形内則分本形為兩正角形其二作垂弧于形外則補成正角形其三作垂弧于次形

總法曰三角俱鋭垂弧在形内一鈍二鋭或在形内或在形外（自鈍角作垂弧則在形内自鋭角作垂弧則在形外）兩鈍一鋭或三角俱

鈍則用次形其所作垂弧在次形之內之外次形無鈍角垂弧在其內有鈍角垂弧在其外若破鈍角亦可在內

第一法垂弧在形內成兩正角 內分五支

設甲乙丙形有兩銳角有角旁相連之乙丙甲丙二邊求對邊及餘兩角

乙
甲
丁
丙

法于乙角在先有乙丙邊之端分不知之角作垂弧如乙丁至甲丙邊分甲丙邊為兩即分本形為兩而皆正角凡垂弧之所到必正角也角不正即非垂弧故所分兩角皆正後倣此 一乙丁丙形此形有丁正角丙角乙丙邊為兩角一邊可求丁丙邊乃丙甲之分 乙丁邊即垂弧 及丁乙丙角即乙分角 次乙丁甲形有丁正角甲丁邊甲丙內減丁丙其餘丁甲 乙丁邊為一角兩邊可求乙甲邊甲角及丁乙甲分角 末以兩乙角并之成乙角

或如上圖丁甲角端作垂弧至乙丙邊分乙丙為兩亦同



右一角二邊而先有者皆角旁之邊為形内垂弧之第一支此所得分形丁丙邊必小於元設邊即垂弧在形内而甲為鋭角

設甲乙丙形有丙鋭角有角旁相連之丙乙邊及與角相對之乙甲邊求餘兩角一邊

乙
甲
丁
丙

法于不知之乙角在先有二邊之中作乙丁垂弧分兩正角形

一乙丙丁形此形有丁正角有丙角有乙邊邊可求乙丁分線及所分丁丙邊及丁乙丙分角　次乙甲丁形此形有丁正角有乙丁邊有乙甲邊可求甲角及丁乙甲分角丁甲邊　末以兩分角丁乙丙及丁乙甲并之成乙角

以兩分邊丁丙及丁甲并之成甲丙邊

右一角二邊而先有對角之邊為形內垂弧之第二支

設甲乙丙形有乙丙二角有乙丙邊在兩角之間求甲角及餘邊

乙
甲　丁　丙

法于乙角作垂弧分兩形並如前但欲用乙丙邊故破乙角存丙角

一乙丙丁形有丁正角丙角乙丙邊可求乙丁邊丁丙邊丁乙丙分角 次乙丁甲形有乙丁邊丁正角丁乙甲分角原設乙角內減丁乙丙得丁乙甲可求乙甲邊甲角及甲丁邊

末以甲丁并丁丙得甲丙邊

或於丙角作垂弧亦同

若角一鈍一鋭即破鈍角作垂線其法並同

右二角一邊而邊在兩角之間不與角對為形内垂弧之第三支此必未知之角為鋭角則垂弧在形内

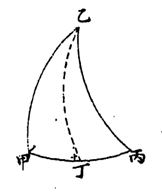
設甲乙丙形有丙甲二角有乙甲邊與丙角相對與甲角相連求乙角及餘二邊

甲 丁 丙 乙

法于乙角為末知之角作垂弧分為兩形而皆正角　一乙丁甲形有丁正角甲角乙甲邊可求甲丁邊乙丁邊丁乙甲分角　次丁乙丙形有丁正角乙丁邊丙角可求乙丙邊丁丙邊丁乙丙分角　末以甲丁丁丙并之成甲丙邊　以兩分角丁乙甲丁乙丙并之成乙角

右二角一邊而先有對角之邊為形内垂弧之第四支此先有二角必俱銳則垂弧在内

設乙甲丙形有三邊而内有乙甲乙丙二邊相同求三角



法從乙角在相同二邊之間作垂弧至丙甲邊乃不同之一邊分兩正角形其形必相等而甲丙線必兩平分乙丙丁形有丁正角乙丙邊丁丙邊即甲丙之半可求丙角乙分角乃乙角之半倍之成乙角而甲角即同丙角不須再求

右三邊求角而內有相同之邊故可平分是為形內垂弧之第五支此必乙丙乙甲二邊並小在九十度內若九十度外甲丙二角必俱鈍當用次形詳第三又法

第二法垂弧在形外補成正角內分七支

設甲乙丙形有丙鋭角有夾角之兩邊乙丙甲丙求乙甲邊及餘兩角

乙
丁
甲
丙

法自乙角在先有邊之一端作垂弧乙丁于形外引丙甲邊至丁補成正角形二一丙乙丁半虛半實二甲乙丁虛形先算丙乙丁形此形有乙丙邊丙角有丁正角可求丙乙丁角半虛半實乙丁邊形外垂弧丁丙邊丙甲引長邊次甲乙丁虛形有丁正角有乙丁邊甲丁邊丁丙內減丙甲得甲丁可求乙甲邊甲角及甲乙丁虛角末以甲角減半周得原設甲角以甲乙丁虛角減丙乙丁角得原設丙乙甲角

右一角二邊角在二邊之中而為鈍角是為形外垂弧之第一支此所得丁丙必大于原設邊即垂弧在形外而甲為鈍角

設乙甲丙形有甲鈍角有角旁之丙甲乙甲二邊求乙丙邊及餘二角

法於乙角作垂弧乙丁引丙甲至丁補成正角　先算乙丁甲虛形此形有丁正角甲角即原設甲角減半周之餘亦曰外角有乙甲邊可求甲丁邊乙丁邊丁乙甲虛角　次丁乙丙形有乙丁邊丁丙邊甲丙加丁甲得之丁正角可求乙丙邊丙角丙乙丁角　末于丙乙丁内減丁乙甲虛角得原設乙角

或從丙作垂弧至戊引乙甲邊至戊補成正角亦同

乙
甲
戊
丙

右一角二邊角在二邊之中而爲鈍角乃形外垂弧之第二支

設乙甲丙形有丙鋭角有角旁之乙丙邊有對角之乙甲邊求丙甲邊及餘二角

乙
丁
甲
丙

法從乙角作垂弧至丁成正角亦引丙甲至丁先算丙乙丁形有丁正角丙角乙丙邊可求諸數乙丁邊丁丙邊丙乙丁角次丁乙甲虛形有丁正角乙丁乙甲二邊可求諸數乙甲丁角甲乙丁角甲丁邊末以所得虛形甲角減半周得原設甲鈍角于丙乙丁內減虛乙角得原設乙角於丁丙內減甲丁得原設丙甲

右一角二邊角有所對之邊而為鋭角乃形外垂弧之第三支此必甲為鈍角故垂弧在外

設乙甲丙形有甲鈍角有角旁之甲丙邊及對角之乙丙邊求乙甲邊及餘二角

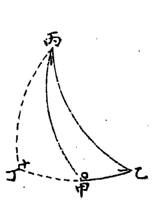
乙
甲
戊
丙

法于丙角作垂弧至戊補成正角　先算虛形甲丙戊有戊正角甲角甲鈍角減半周之餘甲丙邊可求諸數丙戊邊甲戊邊丙虛角

次虛實合形乙丙戊有戊正角丙戊邊乙丙邊可求原設乙角及諸數乙丙戊角乙戊邊　末以先得虛形數減之得原設數丙角內減丙虛角得原設丙角乙戊內減甲戊虛引邊得原設乙甲邊

右一角二邊角有所對之邊而為鈍角乃形外垂弧之第四支此先得鈍角垂線必在外

設乙甲丙形有丙甲二角一銳一鈍有丙甲邊在兩角之中



法於丙鈍角作垂弧至丁在甲鈍角外補成正角　丁丙甲

虛形有丁正角甲外角丙甲邊可求諸數丙丁邊甲丁邊丙虛角

次乙丙丁形半虛實有丁正角丙丁邊丙角以丙虛角補原設丙

角得丁丙乙角可求原設乙丙邊乙角及乙甲邊求得乙丁邊內減虛形之

甲丁邊得原設甲乙邊

右二角一邊邊在兩角間為形外垂弧之第五支

此亦可于甲鈍角作垂弧則在形內法在第一法之第三支

設乙甲丙形有乙甲二角乙鈍甲鈍有丙甲邊與乙鈍角相對鈍角相連

法于丙鋭角作垂弧至戊在丙甲邊外補成正角　甲戊丙虛形有戊正角有丙甲邊甲角原設形之外角可求諸數丙戊甲戊

二邊丙虛角　次乙丙戊形有戊正角乙角丙戊邊可求丙角求得乙丙戊角內減丙虛角得元設丙角　乙丙邊乙甲邊求到乙戊邊內減甲戊得乙甲

右二角一邊而邊對鋭角為形外垂弧之第六支

設乙甲丙形有乙鋭角甲鈍角有丙乙邊與甲鈍角相對鋭角相連

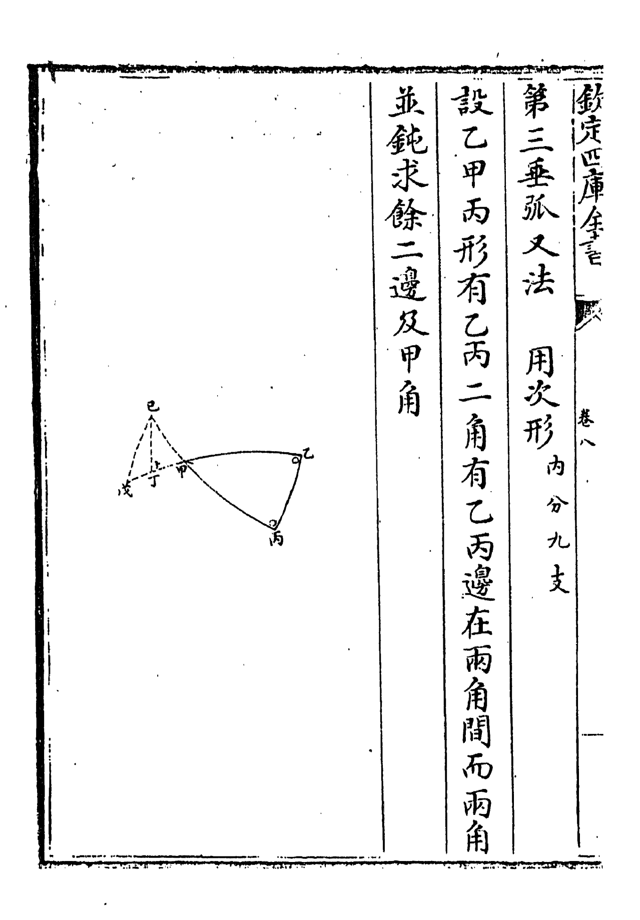
丙
乙
甲
戊

法于丙鈍角作垂弧至戊（在甲鈍角外）補成正角　乙丙戊形有戊正角乙角乙丙邊可求諸數（丙戊乙戊二邊乙丙戊角）　次甲丙戊虛形有戊正角甲外角丙戊邊可求原設丙甲邊甲乙邊（求到戊甲虛邊以減乙戊得原設乙甲）丙角（求到丙虛角以減乙丙戊角得原設丙角）

右兩角一邊兩邊對鈍角為形外垂弧之第七支

第三垂弧又法　用次形內分九支

設乙甲丙形有乙丙二角有乙丙邊在兩角間而兩角並鈍求餘二邊及甲角



法引丙甲至己引乙甲至戊各滿半周作戊己邊與乙丙等而己與戊並乙丙之外角成甲戊己次形依法作垂弧于次形之内如己丁分為兩形一己丁戊一己丁甲可求乙甲邊以己丁戊分形求到丁戊以己丁甲形求到甲丁合之成甲戊以減半周即得乙甲丙甲邊以己丁甲分形求到己甲以減半周即得丙甲甲角以己丁甲分形求到甲交角

右二角一邊邊在角間而用次形為垂弧又法之

第一支

論曰舊說弧三角形以大邊為底底旁兩角同類垂弧

在形內異類垂弧在形外由今考之殆不盡然蓋形內垂弧分底弧為兩成兩正角形所用者鋭角也（底旁原有兩鋭角分兩正角形則各有兩鋭角）形外垂弧補成正角形所用者亦鋭角也（底旁原有一鋭角補成正角形則虛實兩形各有兩鋭角）故惟三鋭角形作垂弧于形內一鈍兩鋭則垂弧或在形內或在形外若兩鈍一鋭則形內形外俱不可以作垂弧（垂弧雖有內外而其用算時並為一正角兩鋭角之比例若形有兩鈍角則雖作垂弧只能成一正一鈍一鋭之形無比例可求則垂弧為徒設矣）故必以次形通之而所作垂弧即在次形不得謂之形

内然則同類之說止可施于兩鋭若兩鈍雖亦同類而不可于形内作垂弧

異類之說止可施于一鈍兩鋭若兩鈍一鋭而底弧之旁一鈍一鋭雖亦異類然不可于形外作垂弧

非通法矣兩鈍角不用次形垂弧之法已窮況三鈍角乎

又論曰以垂弧之法徵之則大邊為底之說理亦未盡

蓋鈍角所對邊必大既有形外立垂線垂弧之法則鈍角有時在下而所對之邊在上矣不知何術能常令大

邊為底乎此尤易見

設乙甲丙形有丙甲二角有乙甲邊與丙角相對而兩角俱鈍求乙角及餘邊

如法引甲乙丙乙俱滿半周會于巳戊丙甲巳次形作巳丁垂弧于次形内分次形為兩可求乙角依法求到分形兩巳角合之為次形巳甲丙邊求到分形甲丁及角與乙對角等甲丙邊丁丙并之即甲丙乙丙邊求到次形巳丙以減半周得之

右二角一邊邊與角對而用次形為垂弧又法之第二支此三角俱鈍也或乙為鋭角亦同

設乙甲丙形有乙丙乙甲兩邊有乙角在兩邊之中

法用甲乙戊次形有乙甲邊有乙戊邊為乙丙減半周之餘有乙外角作甲丁垂弧分為兩形可求丙甲邊及餘兩角以乙甲丁分形求到丁乙及甲分角又以甲戊丁形求到甲戊以減半周為丙甲又得甲分角并先所得成甲角即甲外角又得戊角即丙對角

右二邊一角角在二邊之中而用次形為垂弧又法之第三支

或丙為鈍角則于次形戊角作垂弧法同上條

設乙甲丙形有丙角有甲丙邊與角連有乙甲邊與角

對

丁
戊
己
甲
乙
丙

法用甲己戊次形甲己為甲乙減半周之餘甲戊為甲丙減半周之餘戊角為丙之外角

作垂弧甲丁于内分為兩形可求丙乙邊及餘兩角以甲丁戊分形求丁戊及甲分角又以甲丁己形求得丁己以并丁戊成己戊即丙乙也又得分角以并先得分角即甲交角也又得己角即乙外角也

右二邊一角角與邊對而用次形為垂弧又法之

第四支若甲為鈍角亦同

論曰先得丙鈍角宜作垂弧於外而乙亦鈍角不可作垂弧故用次形

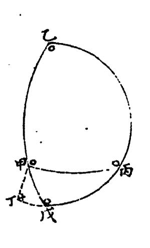
設乙甲丙形有三邊內有乙甲丙甲二邊相同而皆為過弧求三角

法引相同之二邊各滿半周作弧線聯之成戊甲己次形如法作甲丁垂弧分次形為兩其形相等可求相同之二角任以甲丁戊分形求到戊角以減半周得乙角亦即丙角及甲角求到甲半角倍之成甲角

右三邊求角內有相同兩大邊為垂弧又法之第五支　若甲為銳角亦同

以上垂弧並作於次形之內

設乙甲丙形有丙甲二鈍角有甲丙邊在兩角間



法引乙丙乙甲滿半周會於戊成甲戊丙次形自甲作

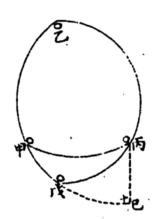
垂弧與丙戊引長弧會于丁補成正角可求乙甲邊乙

丙邊乙角先求丙甲丁形諸數次求甲戊丁得甲戊以減半周為甲乙又以丁戊減先得丁丙得丙戊以減半周為乙丙又求得戊虛角減半周為戊角即乙對角

右兩鈍角一邊邊在角間而於次形外作垂弧為

又法之第六支

或自丙角作垂弧亦同



設乙甲丙形有乙甲二鈍角有甲丙邊與角對

甲
乙
丙
丁
戊

法引設邊戊丙戊甲次形有甲外角有戊鈍角為乙對角有丙甲邊如上法

作丙丁垂弧引次形邊會於丁可求乙丙邊先求甲丁丙形諸數次丙丁戊虛形求到丙戊以減半周為乙丙　乙甲邊先求到丁甲以虛線丁戊減之得戊甲即得乙甲

丙角先求到甲丙丁角內減丙虛角得丙外角即得元設丙角

右二角一邊邊與角對垂弧在次形外為又法之

第七支

設乙甲丙形有丙鈍角有角旁之兩邊丙乙 丙甲

法用甲戊丙次形作甲丁垂弧引丙戊會於丁可求乙甲邊及甲乙二角先以甲丁丙形求到諸數再以甲丁戊虛形求甲戊即得乙甲又甲虛角減先得甲角成甲外角又戊虛角即乙外角

右二邊一角角在二邊之中垂弧在次形外為又法之第八支

設乙甲丙形有甲鈍角有一邊與角對〈乙丙〉一邊與角連〈丙甲〉

乙
丙
甲
戊
丁

法用丙戊甲次形自丙作垂弧與甲戊引長邊會于丁可求乙甲邊及餘兩角依法求到甲戊即得乙甲求戊角即乙角以丙虛角减先得丙角即丙外角

右二邊一角角有對邊垂弧在次形外為又法之

第九支

以上垂弧並作於次形之外

論曰三角俱鈍則任以一邊為底其兩端之角皆同類矣今以次形之法求之而垂弧尚有在次形之外者盖

可與前論相發也

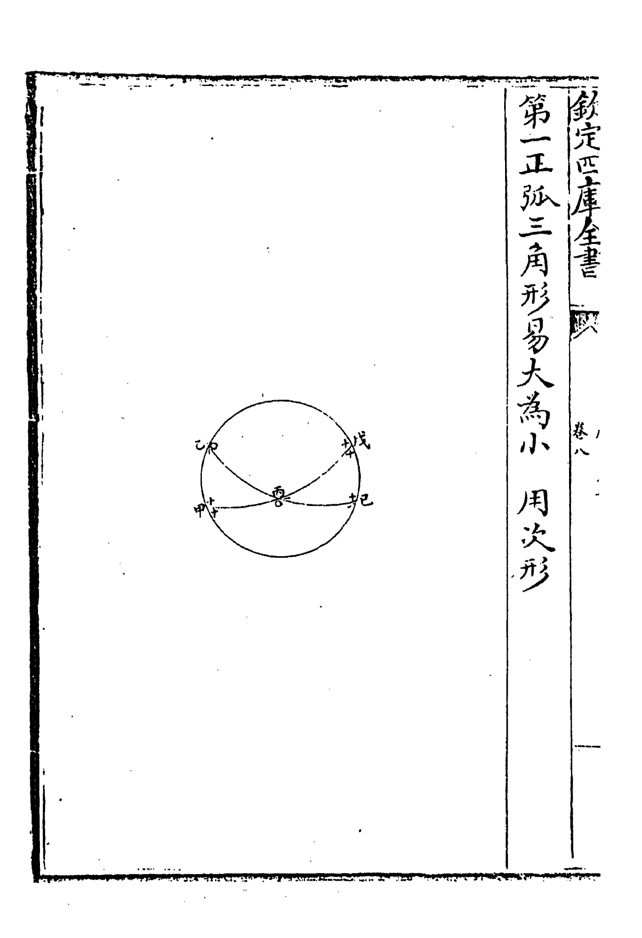
弧三角舉要卷四

弧三角用次形法

次形之用有二

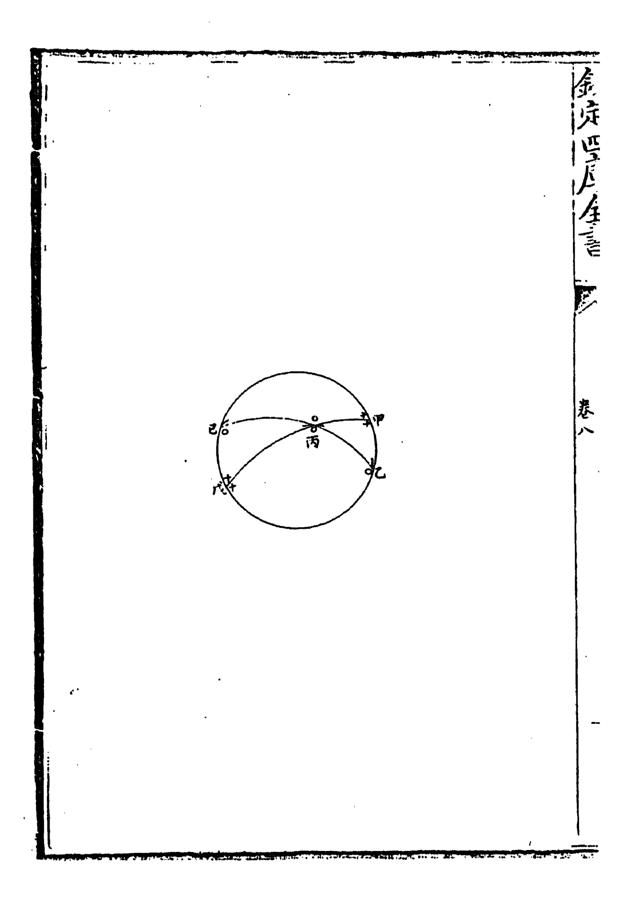
正弧三角斜弧三角並有次形法而其用各有二其一易大形為小形則大邊成小邊鈍角成銳角其一易角為弧易弧為角則三角可以求邊亦二邊可求一邊

第一正弧三角形易大為小 用次形



如圖戊己甲乙半渾圜以戊丙甲己丙乙兩半周線分為弧三角形四一戊丙乙二己丙戊三己丙甲並大四乙丙甲為最小今可盡易為小形

一戊丙乙形易為乙甲丙形戊丙減半周餘丙甲又戊乙減半周餘乙甲而乙丙為同用之弧則三邊之正弦同也乙丙甲角為戊丙乙外角甲乙丙為戊乙丙外角戊角又同甲角則三角之正弦同也故算甲丙乙即得戊丙乙


甲
乙
丙
戊
己

二己丙戊形易為乙甲丙形乙甲己及甲己戊並半周內各減己甲則乙甲同己戊而乙丙于己丙及甲丙于戊丙皆半周之餘又甲戊並正角丙為交角而乙角又為己角之外角故算乙丙甲得己丙戊

三己丙甲形易為乙丙甲形乙甲為己甲減半周之餘乙丙為丙己減半周之餘而同用甲丙又次形丙角為元形之外角乙角同己角甲同為正角故算乙丙甲得己丙甲

用法

凡正弧三角內有大邊及鈍角者皆以次形立算但於得數後以次形之邊與角減半周即得元形之大邊及

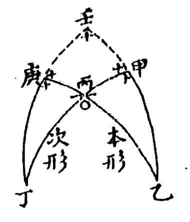
鈍角其元形內原有小邊及鋭角與次形同者徑用得數命之不必復試半周斜弧同

以上易大形為小形而大邊成小邊鈍角成鋭角為正弧三角次形之第一用大邊易小鈍角易鋭則用算畫一算理易明其算例並詳第二用

第二正弧三角形弧角相易　用次形 内分四支

一乙甲丙形易為丁丙庚次形

解曰丁如北極　戊己壬甲如赤道圈　己庚乙如黄道半周　辛丁壬如極至交圈壬如夏至辛如冬至　戊丁甲如所設過極經圈　乙如春分己如秋分並以庚壬大距為其度　丙如所設某星黄道度　丙乙如黄道距春分度其餘丙庚即黄道距夏至為次形之一邊　丙甲如黄赤距度其餘丙丁即丙在黄道距北極度為次形又一邊　庚丁如夏至黄道距北極而為乙角餘度是角易為邊也壬庚為乙角度其餘庚丁是為次形之三邊


壬
庚
甲
丙
次形
本形
丁
乙

又丙交角如黃道上交角　庚正角如黃道夏至　甲乙如赤道同升度其餘壬甲如赤道距夏至即丁角之弧是邊易為角也則次形又有三角

用法

假如有丙交角乙春分角而求諸數是三角求邊也乙丙丙角并甲正角而三法為丙角之正弦與乙角之餘弦若半徑與丙甲之餘弦得丙甲邊可求餘邊

一丙角正弦　丙角正弦

二　乙角餘弦　　丙角正弦

三　半徑甲角在次形半徑庚角

四　甲丙餘弦　　丁丙正弦

右以三角求邊也若三邊求角反此用之

若先有乙丙邊乙甲邊而求甲丙邊則為乙甲餘弦即次形丁角正弦與乙丙餘弦即庚丙正弦若半徑甲角即次形庚角與甲丙餘弦即丁丙正弦

或先有乙丙邊甲丙邊而求乙甲邊則為甲丙餘弦即丁

丙正弦與乙丙餘弦即庚丙正弦若半徑甲角即庚角與乙甲餘弦即丁角正弦

或先有乙甲邊甲丙邊而求乙丙邊則為半徑甲角即庚角與甲丙餘弦即丁丙正弦若乙甲餘弦即丁角正弦與乙丙餘弦即庚丙正弦

右皆以兩弧求一弧而不用角也

以上為乙甲丙形用次形之法本形三邊皆小一正角俻兩鈍角次形亦然所以必用次形者為三

角求邊之用也是為正弧三角次形第二用之第一支

易為丁丙庚次形

二已丙甲形甲正角餘二角丙鈍已鈍丙甲邊小餘二邊並大

形

法曰截己甲於壬截己丙於庚使己壬己庚皆滿九十度作壬庚丁象限弧又引丙甲邊至丁亦滿象限而成丁丙庚次形此形有丁丙邊為丙甲之餘有庚丙邊為己丙之餘（凡過弧內去象限其餘度正弦即過弧之餘弦故己丙內減己庚而庚丙為其餘弧）有庚丁邊為己角之餘乃角易為邊也（庚與壬皆象限即庚壬為己角之度而丁庚為其餘）又有丙銳角為元形丙鈍角之外角有庚正角與元形甲角等（壬庚既為己角之弧則壬與庚必皆正角）有丁角為己甲邊之餘（己甲過弧以壬甲為餘度說見上文）乃邊易為角也

用法

假如有甲正角己鋭角丙鈍角而求丙甲邊法為丙鈍角之正弦即次形丙鋭角正弦蓋外角內角正弦同用也與己角之餘弦即次形丁庚邊之正弦若半徑即次形庚角之正弦與丙甲邊之餘弦即次形丁丙邊之正弦

既得丙甲可求己丙邊　法為半徑與丙角餘弦若甲丙餘切（次形為丁丙正切）與己丙餘切（次形為庚丙正切）得數以減半周為己丙（下同　凡以八線取弧角度者若係大邊鈍角皆以得數與半周相減命度後倣此）

求己甲邊　法為己角之餘弦（即庚丁正弦）與丙角之正弦若己丙之餘弦（即庚丙正弦）與己甲之餘弦（即丁角正弦其弧壬甲）

右三角求邊

又如有己甲己丙兩大邊求丙甲邊　法為己甲餘弦（即丁角正弦）與己丙餘弦（即庚丙正弦）若半徑與丙甲餘弦（即丁丙正

弦

或有己甲丙甲兩邊求己丙大邊　法為半徑與丙甲餘弦（即丁丙正弦）若己甲餘弦（即丁角正弦）與己丙餘弦（即庚丙正弦）得數減半周為己丙下同

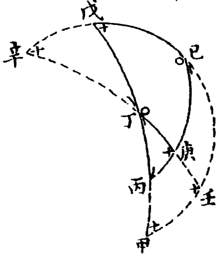
或有丙甲己二邊求己甲大邊　法為丙甲餘弦與半徑若己丙餘弦與己甲餘弦（即上法之反理）

右二邊求一邊

以上己丙甲形用次形之法本形有兩大邊一鈍

角次形則邊小角銳而且以本形之邊易為次形之角本形之角易為次形之邊後二形並同是為正弧三角次形第二用之第二支

三己丙戊形戊正角己鈍角丙銳角己丙與戊丙並大邊易為丁丙庚次形



法曰以象限截己丙于庚其餘庚丙截戊丙于丁其餘丁丙為次形之二邊作丁庚弧其度為己角之餘鈍角與外銳角同以壬庚之度取正弦其餘丁庚為己外角之餘亦即為己鈍角之餘角易邊也次形又為元形之截形同用丙角又庚正角與戊角等而丁角即己戊邊之餘度試引己戊至辛成象限則戊辛等壬甲皆丁角之度而又為己戊之餘邊易角也

用法

假如有丙銳角己鈍角偕戊正角求戊丙邊　法為丙

角正弦與己角餘弦（即庚丁正弦）若半徑與戊丙餘弦（即丁丙正弦）得數減半周為戊丙（下同）

既得戊丙可求己丙　法為半徑與丙角餘弦若戊丙餘切（即丁丙正切）與己丙餘切（即庚丙正切）

求己戊邊　法為戊丙餘弦（即丁丙正弦）與半徑若己丙餘弦（即庚丙正弦）與己戊餘弦（即丁角正弦）

以上己丙戊形三角求邊為正弧三角次形第二

用之第三支

四乙丙戊形（戊正角乙丙並鈍角戊乙戊丙並大邊乙丙小邊）易為丁丙庚次形

法曰引乙丙邊至庚滿象限得次形丙庚邊即乙丙之餘于丙戊截戊丁象限得次形丁丙邊為戊丙之餘而丁即為戊乙弧之極戊正角至丁九十度故知之從丁作弧至庚成次形庚丁邊為乙角之餘是角易為邊也試引庚丁至辛則辛丁亦象限而辛為正角庚亦正角乙庚乙辛皆象限弧是庚丁辛即乙鈍角之弧度内截丁辛象限而丁庚為乙鈍角之餘度矣又庚正角與戊等丙為外角丁角為乙戊邊之餘是邊易為角也乙戊丙截乙辛象限其餘戊辛即丁交角之弧

用法

假如三角求邊以丙角正弦為一率乙角餘弦為二率半徑為三率求得戊丙餘弦為四率以得數減半周為戊丙餘並同前

以上乙丙戊形三角求邊為正弧三角次形第二

用之第四支

論曰歴書用次形止有乙甲丙形一例若正角形有鈍角及大邊者未之及也故特詳其法

又論曰依第一用法大邊可易為小鈍角可易為鋭則

第二三四支皆可用第一支之法而次形如又次形矣

已丙甲形己丙戊形乙丙戊形皆易為乙甲丙形而乙甲丙又易為丁丙庚是又次形也

正弧形弧角相易又法　用又次形

甲乙丙正弧三角形易為丁丙庚次形再易為丁戊壬形

法曰依前法引乙丙邊甲乙邊各滿象限至庚至巳作庚巳弧引長之至丁亦引甲丙會于丁亦各滿象限成丁丙庚次形

又引丙庚至辛引丙丁至戊亦滿象限作辛戊弧引之至壬亦引庚丁會于壬則辛壬庚壬亦皆象限成丁戊壬又次形此形與甲乙丙形相當

論曰乙丙邊易為壬角乙庚及丙辛皆象限內減同用之丙庚則辛庚即乙丙而辛庚即壬角之弧乙甲邊易為丁角乙甲之餘度巳甲即丁交角之弧是次形之

兩角即元形之兩邊也乙角易為丁壬邊丁己及庚壬俱象限內減同用之庚丁則丁壬即己庚而為元形乙角之弧丙角易為戊壬邊丙交之弧弧辛戊其餘為次形戊壬是次形之兩邊即元形之兩角而次形戊丁邊即元形丙甲次形戊角即元形甲角

用法

若原形有三角則次形有戊直角有戊壬丁壬二邊可求乙甲邊法為乙角之正弦即丁壬與半徑若丙角之餘弦即戊壬正弦與乙甲之餘弦即丁角正弦

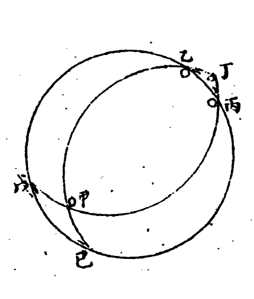
求乙丙邊　法為乙角之切線（即丁壬切線）與丙角之餘切（即戊壬正切）若半徑與丙乙之餘弦（即壬角餘弦）既得兩邊可求餘邊

以上又次形三角求邊為正弧三角第二用之又法

論曰用次形止一弧一角相易今用又次形則兩弧並易為角兩角並易為弧故於前四支並峙而為又一法也

第三斜弧三角易大為小　用次形內分二支

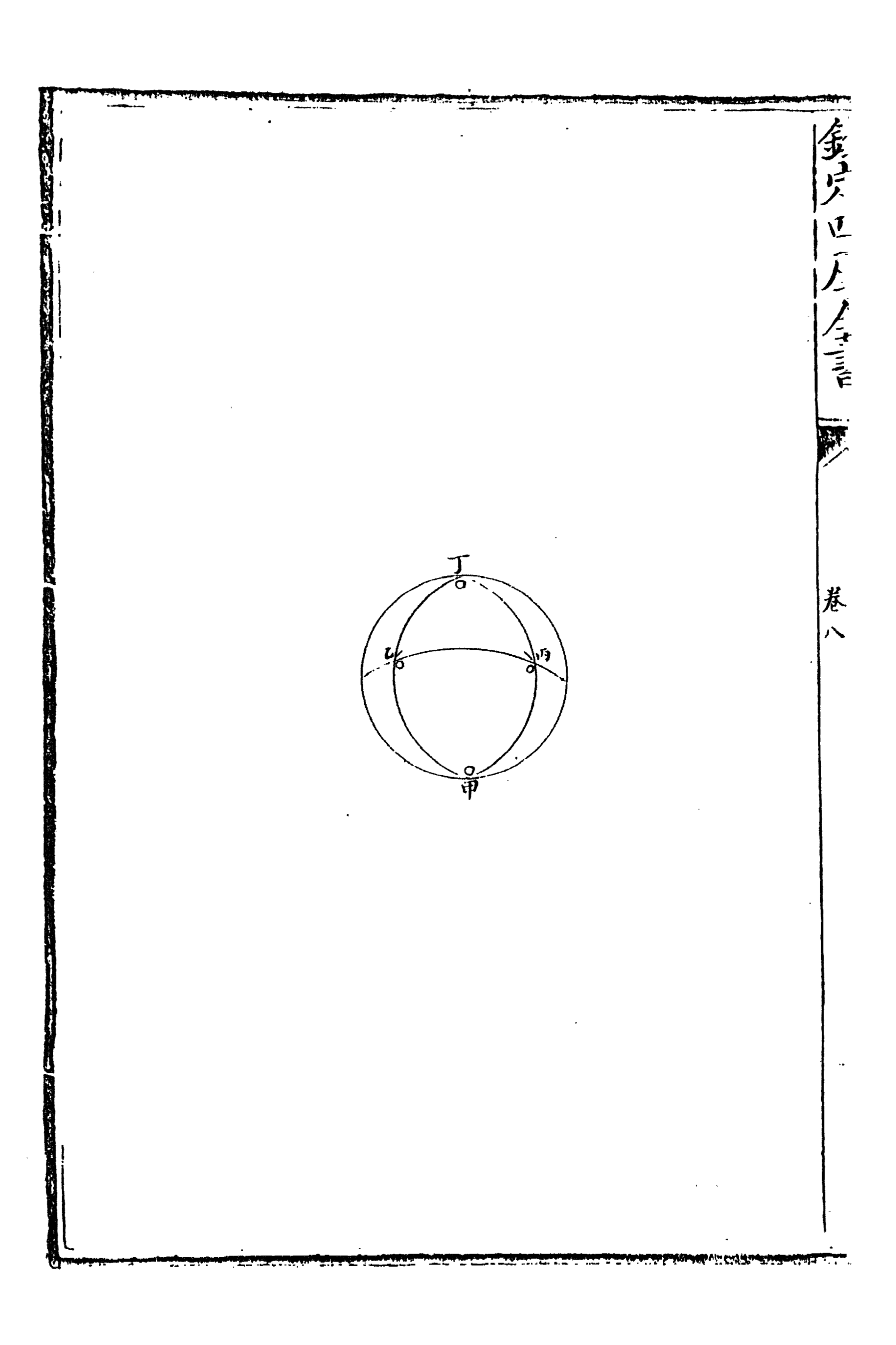
一甲乙丙二等邊形　三角皆鈍



如法先引乙丙邊成全圖又引甲丙甲乙兩邊出圜周外會于丁又引兩邊各至圜周（如戊如己）成乙丁丙及戊甲己兩小形皆相似而等即各與元形相當而大形易為小形

論曰次形（甲戊甲己）二邊為元形邊減半周之餘則同一正弦次形（己戊）二角為元形之外角亦同一正弦（甲乙戊為甲乙丙外角而與次形己角等甲丙己為甲丙乙外角亦與次形戊角等）而次形甲角原與元形為交角戊己邊又等乙丙邊（戊乙丙及己戊乙並半周各減乙戊則戊己等乙丙）

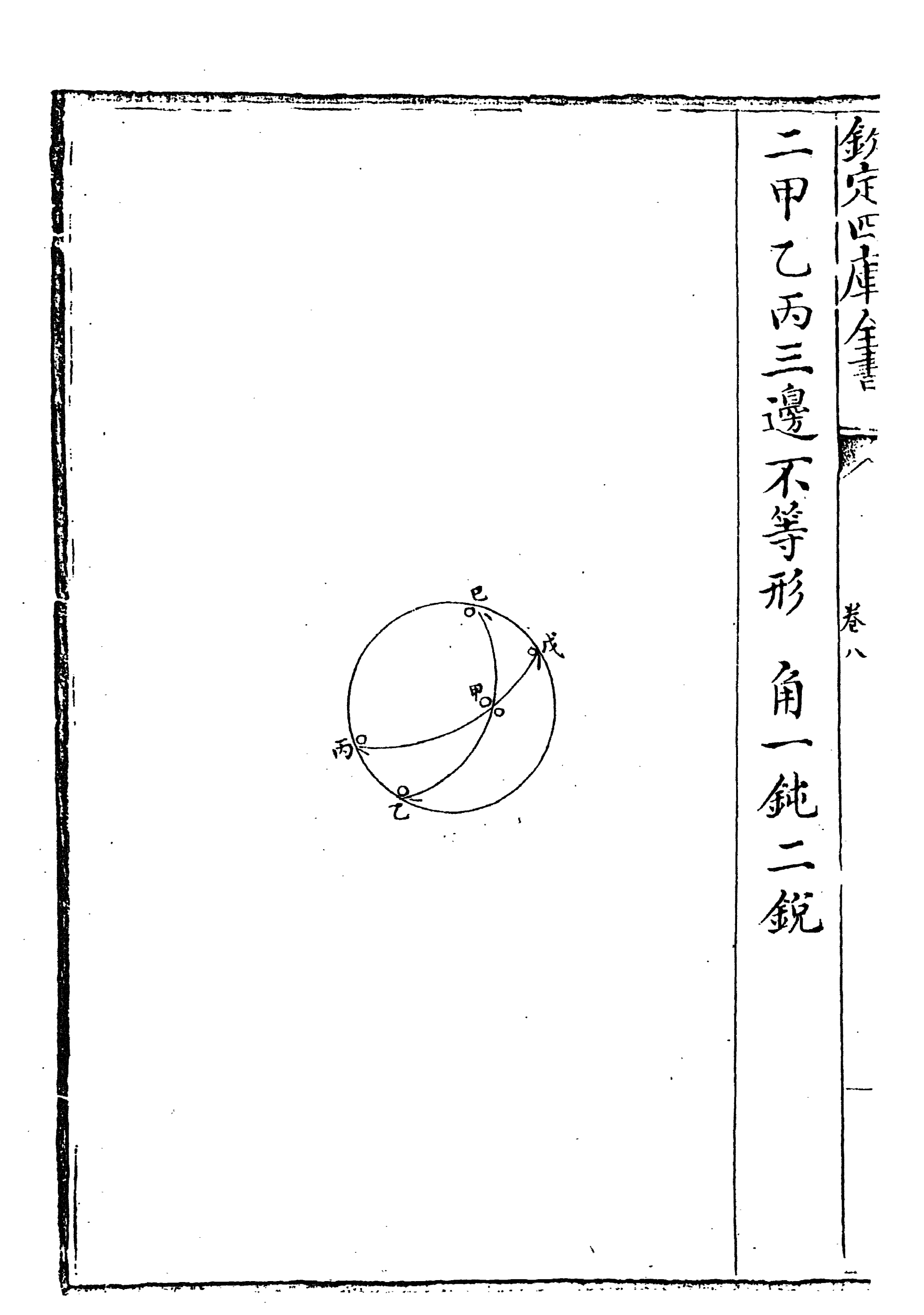
故算小形與大形同法惟於得數後以減半周即得大邊及鈍角之度置半周減戊甲得甲丙減巳甲亦得甲乙又置半周減巳銳角得元形乙鈍角減戊銳角亦得元形丙鈍角其交角甲及相等之戊巳邊只得數便是并不用減


丁
乙
丙
甲

論曰凡兩大圈相交皆半周故丁丙與丁乙亦元形減半周之餘又同用乙丙而乙與丙皆外角丁為對角故乙丙丁形與戊甲己次形等邊等角而並與元形甲乙丙相當

右二邊等形易大為小為斜弧次形第一用之第一支

二甲乙丙三邊不等形　角一鈍二鋭



如法引乙丙作圜又引餘二邊甲乙甲丙至圜周己戊得相當

次形己甲戊算戊甲得甲丙算己甲得甲乙算己戊得乙丙其角亦一鈍二銳算戊鈍角得丙銳角算己銳角得乙鈍角而甲交角一算得之

又戊甲乙形　角一鈍二銳　如法引戊乙作圜又引

乙甲至圜周己成次形己甲戊與元形相當算己甲得甲乙算己戊得戊乙又同用戊甲邊故相當算甲銳角得甲鈍角算戊鈍角得戊銳角算己角即乙角

又甲己丙形　三角俱鈍　如上法引丙己作圜又引

丙甲至戊成次形己甲戊與元形相當元形甲丙與戊甲元形己丙與

己戊並減半周之餘又同用己甲又丙鈍角即戊鈍角甲己兩鈍角並元形之外角

右三邊不等形易大為小為斜弧次形第一用之

第二支

第四斜弧三角形弧角互易　用次形內分三支

一乙甲丙形三角俱鈍易為丑癸寅形一鈍二銳

法曰引乙甲作圜次引乙丙至酉引甲丙至未並半周次以甲為心作丁辛癸寅弧乙為心作戊丑癸壬弧丙為心作丑子午寅弧三弧交處別成一丑癸寅形與元形相當而元形之角盡易為邊邊盡易為角

論曰甲角之弧丁辛與次形癸寅等則甲角易為癸寅邊丁癸及辛寅皆象限減同用之辛癸則癸寅同丁辛乙角之弧己壬與次形丑癸等則乙角易為丑癸邊癸己及丑壬皆象限減同用之癸壬即丑癸同壬己丙外角之弧午申引丑午寅至申辰亥申與庚子等成午申與次形寅丑等則

丙外角易為寅丑弧丑午及寅申皆象限各加同用之午寅即午申等丑寅是元形有三角即次形有三邊也　又甲乙邊之度易為癸外角乙己及甲辰皆象限內減同用之甲己則乙甲同己辰為癸外角弧甲丙邊易為寅角甲辛及丙子皆象限內減同用之丙辛則甲丙等辛子而同為寅角之弧乙丙邊易為丑角乙壬及午丙皆象限內減同用之丙壬則乙丙等午壬而同為丑角之弧是元形有三邊即次形有三角也

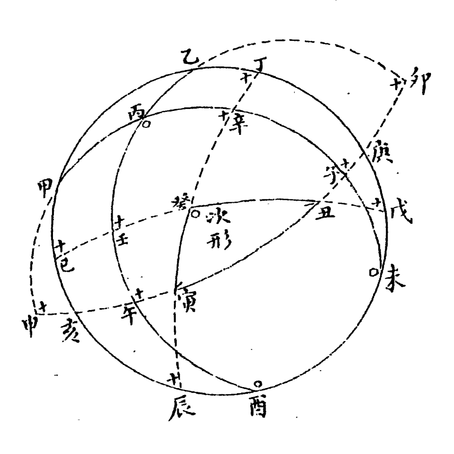
又論曰有此法則三角可以求邊既以三角易為次形之三邊再用三邊求角法求得次形三角即反為元形之三邊　三邊求角法詳別卷

又論曰引丙甲出圜外至申亦引庚亥弧出圜外㑹于申則庚亥與子申並半周内各減子亥即子庚同亥申而子寅既象弧則寅申亦象弧矣以寅申象弧加午寅與以丑午象限午壬為丑角之弧故丑午亦象限加午寅必等而申午者丙外角之度丑寅者次形之邊也故丙角能為次形之邊也

又論曰凡引弧線出圜外者其弧線不離渾圜面冪因平視故為周線所掩稍轉其渾形即見之矣但所引出

之線原爲半周之餘見此餘線時即當别用一圈爲外
周而先見者反有所掩如見亥申即不能見子庚故其
度分恒必相當亦自然之理也
又論曰依第三用法之第二支丙未酉形及丙未乙形
丙酉甲形並可易爲甲乙丙則又皆以癸丑寅爲又次
形矣
右三角俱鋭形弧角相易爲斜弧次形第二用之
第一支

二末丙酉形三角俱鈍易為丑癸寅形一鈍二鋭



法曰引酉未弧作圜又引兩邊至圜周（如乙如甲）乃以未為心作丁辛癸寅辰弧以酉為心作戊丑癸壬巳弧以丙為心作庚子丑寅午申弧亦引丙甲出圜外會於申三弧相交成丑癸寅形此形與元形相當而角盡易為弧弧盡易為角

論曰未外角之弧丁辛成次形癸寅弧（癸丁及寅辛皆象限內減同用之癸辛則癸寅即丁辛）酉外角之弧壬巳成次形丑癸弧（壬丑及癸巳皆象限各減癸壬則丑癸即壬巳）丙外角之弧申午成次形寅丑弧（準前論庚

亥及子申並半周則申亥等子庚而申寅為象限與午丑象限各減午寅即寅丑同申午是三角盡易為邊也酉未邊成癸外角酉戊及未丁皆象限各減未戊則丁戊即酉未而為未丙邊減半周癸外角之弧若以丁戊減戊乙己半周其餘丁乙己過弧亦即為癸交角之弧其餘甲丙戌寅角甲辛及子丙皆象限各減辛丙則辛子即甲丙而為寅角之弧酉丙邊減半周其餘乙丙戌丑角午丙及壬乙皆象限各減丙壬則壬午即乙丙而為丑角之弧是三邊盡易為角也寅角丑角並原邊減半周則原邊即兩外角弧與酉未戌癸外角等故三角減半周得次形三邊算得次形三角減半周得原設三邊

右三角俱鈍形弧角相易為斜弧次形第二用之

第二支

論曰若所設為乙未丙形則未角易為次形癸寅邊徑用丁辛于形內以當乙外角為丑癸邊亦以己壬當丑癸寅不須言外角與用酉外角同理

丙角為丑寅邊徑以丙交角之弧甲午當丑寅不言外角若所設為甲酉

丙形則酉角易為丑癸邊己壬徑當丑癸不言外角甲外角為寅癸

邊用丁辛當癸寅即甲外角丙角為丑寅邊亦申午當丑寅不言外角

又論曰此皆大邊徑易次形不必復言又次

三甲乙丙形一鈍角兩鋭角易為丑癸寅形

如法引甲乙邊作全圜引餘二邊各滿半周又以甲為心作丁壬癸丑辰半周以乙為心作戊庚辛癸寅亥弧以丙為心作己午子丑寅卯弧三弧線相交成丑癸寅次形與元形相當而角為弧弧為角

論曰易甲角為次形丑癸邊於癸丁象限減壬癸成丁壬為甲角之弧於丑壬象限亦減壬癸即成癸丑邊其數相等乙外角為次形癸寅邊於癸戊象限減癸辛成辛戊為乙外角之弧于寅辛象限亦減癸辛即成癸寅邊其數相等丙角為次形丑寅邊于丑午象限減丑子成午子為丙角之弧于寅子象限亦減丑子即成丑寅邊其數相等則角盡為

邊又甲乙邊為癸角于甲丁象限乙戊象限各減乙丁則戊丁等甲乙而癸角角之弧

乙丙邊戌寅角于乙辛及子丙兩象限各減丙辛則辛子等乙丙而為寅角之弧　甲丙

邊為丑外角于甲壬及午丙兩象限各減丙壬則午壬等甲丙而為丑外角之弧　則邊盡

為角

右一鈍角兩鋭角形弧角相易為斜弧次形第二

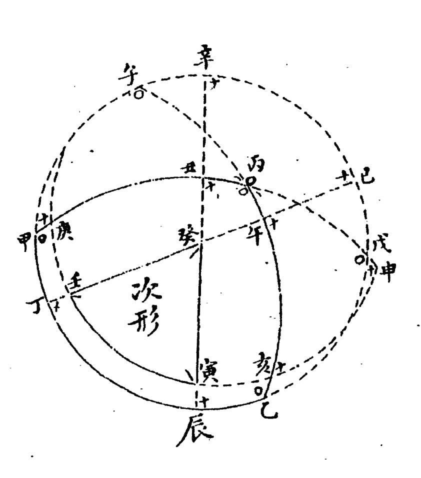
用之第三支

論曰若所設為甲丙酉形三角俱鈍而有兩大邊　則以甲外角為

次形丑癸邊酉外角為癸寅邊丙外角為丑寅邊又以

三邊為次形三外角並與第二支未丙酉形三鈍角同理若所設為丙未酉形乙未丙形並一鈍二鋭而有兩大邊皆依上法可徑易為丑癸寅次形觀圖自明

甲乙丙形三邊並大三角並鈍易為次形



法以本形三外角之度為次形三邊午巳為乙外角之度而與癸壬等丑辛為甲外角之度而與癸寅等申亥為丙外角之度而與寅壬等以本形三邊減半周之餘為次形三角甲乙減半周其餘戊乙或子甲而並與辰丁等即癸角之度甲丙減半周其餘戊丙而與丑庚等即寅角之度乙丙減半周其餘子丙而與午亥等即壬角之度並同前術

論曰此即歷學會通所謂別算一三角其邊為此角一百八十度之餘者也然惟三鈍角或兩鈍角則然其餘則兼用本角之度不皆外角

右三角俱鈍形弧角相易同第二支惟三邊俱大

子戊丙形一大邊二小邊一鈍角二銳角

其法亦以次形癸壬癸寅二邊為本形子戊二角之度寅壬邊為丙外角之度次形寅壬二角為本形二小邊之度癸角為大邊減半周之度

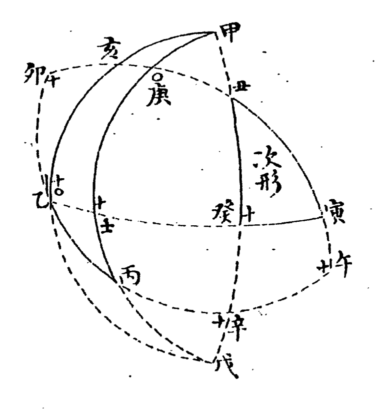
論曰此所用次形與前同而用外角度者惟丙角其子角戊角只用本度為次形之邊非一百八十度之減餘也　若設戊丙乙形子丙甲形並同戊丙乙形惟次形癸寅邊為戊外角其餘癸壬邊之度為乙角寅壬邊之度為丙角則皆本度子丙甲形惟次形癸壬邊為子外角其餘寅壬邊之度為丙角癸寅邊之度為甲角則皆本度

右一鈍角二鋭角與第三支同　惟為邊一大一小

第五斜弧正弧以弧角互易內分二支

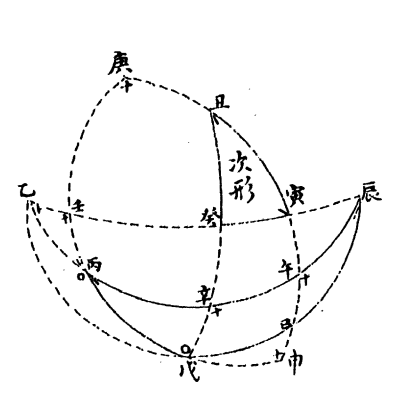
一甲乙丙形甲乙邊適足九十度餘二邊一大一小角一鈍二銳易為丑癸寅正弧形癸正角餘銳三邊並小

法曰引乙丙小邊成半周於乙引至卯補成丙乙卯象限又于丙引至午成丙辛午象限即成半周作卯亥庚丑寅午以丙為心之半周截丙甲大邊于庚使丙庚與丙乙卯等乃作庚卯弧為丙角之度即庚與卯皆正角依此引至午亦得正角而成半周以丙為心作甲丑癸辛戊以乙為心之半周引甲乙象限至戊成半周于甲于戊各作正角聯之即又成半周而截乙辛成象限與乙戊等即辛戊為乙外角度而此半周以乙為心作乙壬癸寅弧以甲為心甲戊半周折半于癸成丙象限從癸作十字正角弧一端至寅一端至乙成癸乙象限其所截甲壬亦象限即乙壬為甲角之弧而甲為其心三弧線相交成一丑癸寅次形與本形弧角相易而有正角


甲
亥
卯
庚
丑
次形
乙
壬
癸
寅
午
丙
辛
戊

論曰次形丑寅邊即本形丙角之度丑卯及寅庚皆象限各減丑庚則丑寅即庚卯而為丙角之弧癸寅邊即甲角之度寅壬及癸乙皆象限各減癸壬則癸寅即壬乙而為甲角之弧癸丑邊即乙外角之度丑辛及癸戊皆象限各減癸辛則丑癸即辛戊而為乙外角之弧是角盡易邊也又寅角為甲丙邊所成庚及壬戊皆象限各減丙壬則寅角之丙弧庚壬與甲丙減半周之丙戊等丑角為乙丙邊所成午丙及辛乙皆象限各減辛丙則丑角之弧午辛與乙丙邊等癸正角為甲乙邊所成癸正角內外並九十度而甲乙象限為癸外角弧若減半周則乙戊象限為癸交角弧是邊盡為角而有正角也

又辰戊丙形辰戊邊象限餘並同前易為正弧形並同前法觀圖自明



乙丙戊形（乙戊邊足一象限餘並小）易為正角形則丑寅度即丙外角丑癸度即乙角寅癸度即戊角是角為邊也又寅角生于丙戊丑角生于乙丙癸正角生于乙戊是邊為角而有正角也

辰甲丙形辰甲象弧餘二邊大三角並鈍易為正角形則丑寅邊為丙外角丑癸邊為辰外角寅癸邊為甲外角角為邊也又寅角生于甲丙丑角生于辰丙而癸正角生于辰甲並準

前條諸論推變是邊為角而且有正角也

右本形有象限弧即次形有正角而斜弧變正弧為弧角互易之第一支

丙乙甲形丙正角餘兩銳角相等邊三小相等者二易為巳癸壬次形角一鈍二銳銳相等

法以甲為心作寅巳丑半周則甲角之度子寅弧成次形一邊巳壬以乙為心作卯巳午半周則乙角之度卯辰弧成次形又一邊巳癸此所成二邊相等以丙為心作亥癸壬未半周則丙角之度癸壬象限即為次形第三邊　依法平分次形以巳壬酉形求壬角得原設甲丙邊壬角之度癸子與甲丙等乙丙邊壬癸兩鈍角原同度而癸角之度辰壬與乙丙等故一得兼得也求半巳角倍之成巳角以減半周得原設乙甲邊巳外角之度午寅戌丑卯並與乙甲等

論曰本形有正角次形無正角而有象限弧得次形之象限弧得本形之正角矣

若設丙戊丁形丙正角兩鈍角同度二大邊同度一邊小易為己癸壬次形與上同法惟丁戊用外角

若設甲丙戊形丙正角餘一銳一鈍而銳角鈍角合成半周邊二大一小而小邊與一大邊合成一半周易為己癸壬次形亦同上法惟甲用外角戊用本角而同度所得次形之邊亦同度甲外角之度子寅戌次形己壬邊戊本角之度辰卯戌次形己癸邊而四者皆同度其轉求本形也用次形之壬角得

甲丙以減半周即得丙戊或乙丙丁形亦同

右本形有正角而次形無正角為弧角互易之第二支

或三角形無相同之邊角而有正角其次形必有象限邊或無正角而有相同之邊角其次形亦有等邊等角準此論之

次形法補遺角一銳一鈍邊二大一小

附算例　三角求邊　三邊求角

甲乙丙形甲角一百二十度乙角一百一十度丙角八十五度為一銳二鈍三角求邊

如法易為丑寅癸次形癸寅邊六十度當甲角丑癸邊七十度當乙角寅丑邊當丙角並以角度減半周得之求甲乙邊即次形癸外角法以甲乙兩角正弦相乘半徑除之得數八一三八〇為一率半徑一〇〇〇〇〇為二率甲乙兩角相較十度之矢與丙角減半周九十五度大矢相較得數一〇七一九七為三率求得四率一三一七二四為次形癸角大矢內減半徑成餘弦三一七二四檢表得癸外角七十一度三十分為甲乙邊本宜求癸角以減半周得甲乙今用省法亦同

論曰三角求邊而用次形實即三邊求角也故其求甲乙邊實求次形癸角得癸角得甲乙邊矣然則兩角正弦仍用本度者何也凡減半周之餘度與其本度同一正弦也甲角一百二十度之正弦八六六〇三即次形癸寅邊六十度之正弦乙角一百一十度之正弦九三九六九即次形丑癸邊七十度正弦獨丙角用餘度大矢何也正弦可同用而矢不可以同用也丙以外角易為次形丑寅邊九十五度其大矢一〇八七一六而丙角本八十五度是銳角當用正矢故不可以通用然則兩角較矢又何以仍用本度曰兩餘度之較與本度同故也甲角乙角之較十度

所易次形之癸寅邊丑癸邊其較亦十度所得四率為大矢而甲乙邊小何也曰餘度故也甲乙邊易為癸外角而四率所得者癸內角也故為甲乙減半周之餘度用餘度宜減半周命度矣今何以不減曰省算也雖不減猶之減矣四率係大矢必先得癸外角七十一度半以減半周得癸內角一百○八度半再以癸內角減半周仍得七十一度半為甲乙邊今徑以先得癸外角之度為甲乙邊其理無二

求甲丙邊　如上法以邊左右兩角正弦甲八六六○三丙九九六一九相乘半徑除之得數八六二七三為一率半徑一○○○○○為二率甲丙兩角相較三十五度矢一八○八五與乙外角七十度矢六五

七九八相較得數四七七一三為三率求得甲丙邊半周餘度之矢五五三〇四為四率檢表得六十三度二十七分以減半周得甲丙邊一百一十六度三十三分

論曰此亦用次形三邊求寅角也以甲角所易癸寅邊丙角所易寅丑邊為角旁二邊以乙角所易丑癸邊為對角之邊求得寅角之度辛子與酉丙等即甲丙減半周餘度

求乙丙邊 如法以邊左右兩角正弦丙九九六一九乙九三九六九相乘半徑除之得數九三六一二為一率半徑一〇〇〇〇〇為二率丙乙兩角較二十五度矢〇九三六九與甲外角六十度矢相較〇四

三六一為三率求得餘度矢四三四〇三為四率撿表得五十五度三十二分以減半周得乙丙邊一百廿四度廿八分

論曰此用次形三邊求丑角也丙角易寅丑邊乙角易丑癸邊為角旁二邊甲角易癸寅為對邊求得丑角度午壬與未丙等即乙丙邊減半周餘度又論曰此所用次形之三邊三角皆本形減半周之餘度甲乙同巳辰即癸外角度則次形癸角為甲乙邊之半周餘度也寅角之度子辛與酉丙等甲丙邊之餘度也丑角之度午壬與未丙等乙丙邊之餘度也是次形三角皆本形三邊減半周之餘度矣其次形三邊為本形三角減半周之餘已詳前註故所得四率為角之大小矢者皆必減半周然後可以命度若他形則不盡然

必須詳審

如甲未丙形甲角六十度丙角九十五未角一百一十易丑寅癸次形則其角易為邊用本度者二甲角弧丁辛六十度易次形癸寅邊丙角弧申午九十五度易次形寅丑邊用餘度者一未角弧壬戊一百一十度其半周餘度已壬七十度易次形丑癸邊而其邊易為角用本度者二未丙邊五十五度三十二分與午壬等成次形丑角甲未邊餘度未酉七十一度三十分與丁戊等成癸外角則次形癸角一百○八度三十分為甲未邊本度用餘者一甲丙邊一百十六度三十三分其餘度酉丙六十三度二十七分與辛子等成次形寅角若一槩用餘度算次豈不大謬

又如乙丙酉形乙角七○丙角九五酉角一二○用癸寅丑次形前圖求丙

酉邊

如法以邊左右兩角正弦（丙九九六一九 酉八六六〇三）相乘去末五位得數（八六二七三）為一率半徑一〇〇〇〇〇為二率以（酉外角 丙角）相差（三十五度）矢（一八〇八五）與乙角矢（六五七九八）相較（四七七一三）爲三率求得正矢（五五三〇四）為四率（次形寅角之矢）檢表得六十三度二十七分為丙酉邊

論曰此所用四率與前條求甲丙邊之數同而邊之大小迴異一為餘度一為本度也（前條為餘度之矢故甲丙邊大此條為本度之）

矢故丙酉邊小又所用矢較亦以不同而成其同前條以兩角相差此則以酉外角與丙角相差不同也而相差三十五度則同前條用乙外角之矢此條用乙本角又不同也而矢數六五七九八則同其理皆出次形也

求酉乙邊　如法以兩角正弦乙九三九六九酉八六六〇三相乘去末五位得八一三八〇為一率半徑為二率酉外角乙角相差十度之矢與丙角九十五度之矢相較得一〇六一九七為三率求得大矢次形癸角之矢為四率一三一七二四撿表得一百〇八度三十分為酉乙邊此與前條求甲乙邊參看即見次形用法不同之理如前所論

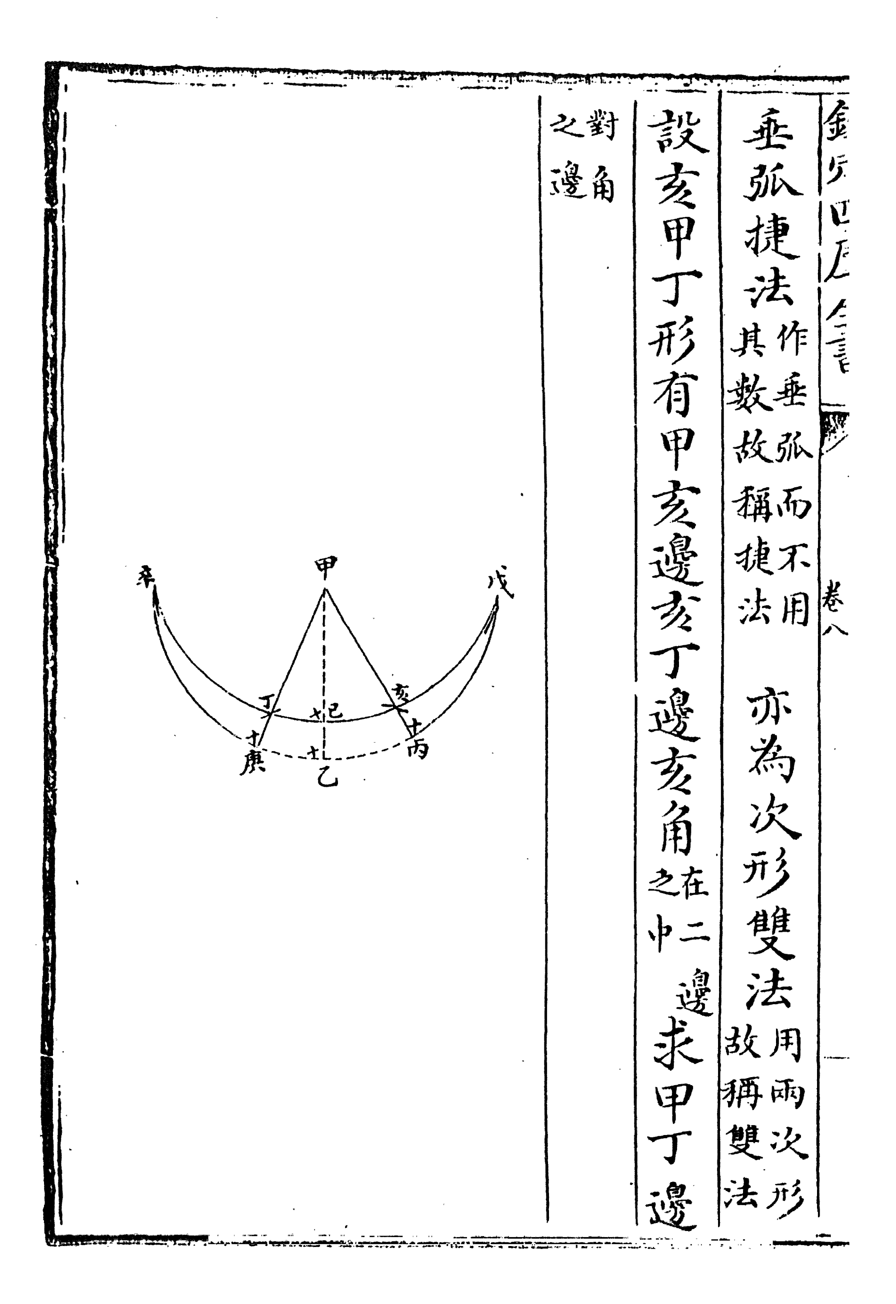
求乙丙邊　與前條同法因丙乙兩内角之正弦及差度並與兩外角同而酉角又同甲角故也

論曰三角求邊必用次形而次形之用數得數並有用求度餘度之異即此數條可知其槩

又論曰在本形為三角求邊者在次形為三邊求角故此數條即三邊求角之例也餘詳環中黍尺

垂弧捷法作垂弧而不用其數故稱捷法 亦為次形雙法用兩次形故稱雙法

設亥甲丁形有甲亥邊亥丁邊亥角在二邊之中求甲丁邊對角之邊



本法作垂弧分兩形先求甲已邊次求亥已邊分丁已邊再用甲已丁已二邊求甲丁邊

今捷法不求甲已邊但求亥已邊分丁已邊即用兩分形之兩次形以徑得甲丁

一　亥已餘弦　即次形亥戊正弦

二　亥甲餘弦　即次形亥丙正弦

三　已丁餘弦　即次形辛丁正弦

四　甲丁餘弦　即次形庚丁正弦

法引甲亥邊至丙引甲丁邊至庚引甲己垂弧至乙皆滿象限又引分形邊亥己至戊引丁己至辛亦滿象限末作辛庚乙丙戊半周與亥己遇于戊與丁己遇于辛成亥丙戊次形與甲己亥分形相當丁亥辛次形與甲己丁分形相當而此兩次形又自相當（戊角辛角同以己乙為其度則兩角等丙與庚又同為正角則其正弦之比例皆等）

論曰半徑與戊角之正弦若戊亥之正弦與亥丙之正弦又半徑與辛角（即戊角）之正弦若辛丁之正弦與丁庚

之正弦合之則戊亥正弦與亥丙正弦赤若辛丁正弦與丁庚正弦

又論曰辛丁巳亥戊如黄道半周辛庚乙丙戊如赤道半周甲如北極辛如春分戊如秋分巳乙如黄赤大距即夏至之緯乃二分同用之角度（即戊角辛角之度）亥丙及丁庚皆赤緯甲亥及甲丁皆距北極之度（即赤緯之度）

一　戊亥正弦　黄經　戊亥為未到秋分之度辛

二　亥丙正弦　赤緯　丁為巳過春分之度似有

三　辛丁正弦　黃經　不同而二分之角度既同

四　丁庚正弦　赤緯　故其比例等

若丁為鈍角則如上圖作甲巳線于形外

一　亥己餘弦　即亥戊正弦

二　亥甲餘弦　即亥丙正弦

三　己丁餘弦　即戊丁正弦

四　甲丁餘弦　即庚丁正弦

論曰此理在前論中葢以同用戊角故比例同也

又論曰乙庚丙戊如赤道己丁亥戊如黄道皆象弧戊角如秋分其弧己乙如夏至距緯此兩黄經並在夏至後秋分前其理易見

或先有者是丁鈍角甲丁丁亥二邊則先求丁巳線亦用前圖

一　丁己餘弦　　即戊丁正弦

二　甲丁餘弦　　即丁庚正弦

三　亥己餘弦　　即亥戊正弦

四　亥甲餘弦　　即亥丙正弦

又論曰假如星在甲求其黄赤經緯則亥丁如兩極之距亥角若為黄經則丁角為赤經而亥甲黄緯丁甲赤緯也若丁角為黄經則亥角為赤經而丁甲黄緯亥甲赤緯也弧三角之理隨處可施故舉此以發其例

弧三角舉要卷五

八線相當法引

弧三角有以相當立法者何也以四率皆八線也弧三角四率何以皆八線而不用他線八線但論度他線則有大尺故也弧三角皆在渾員之面渾體異平而御渾者必以平是故八線之數生于平員而八線之用專于渾員也曷言乎專為渾員曰平三角之角之邊皆直線也同在一平面而可以相為比例故雖用八線而四率中必兼他線焉以八

線例他線則用角可以求邊以他線例八線則用邊可以求角皆兼用兩種線弧三角之角之邊皆弧度曲線也不同在平面故非八線不能為比例而四率中無他線焉既皆以八線相比例則同宗半徑有角之八線有邊之八線各角各邊俱非平面而可以相求者同一半徑也相當互視之法所由以立也錯舉似紛實則有條不紊故為論列使有倫次云

八線相當法詳衍

總曰相當分之則有二曰相當曰互視互視又分為二曰本弧曰兩弧

但曰相當者皆本弧也又分為二曰三率連比例者以全數為中率也其目有三曰四率斷比例者中有全數也其目有六凡相當之目九

互視者亦相當也皆為斷比例而不用全數若以四率之一與四相乘二與三相乘則皆與全數之自乘等也

本弧之互視其目有三兩弧之互視其目有九凡互視之目十二

總名之皆曰相當其目共二十一內三率連比例三更之則六四率斷比例十有八更之反之錯而綜之則百四十有四共百有五十

相當共九

一曰正弦與全數若全數與餘割

二曰餘弦與全數若全數與正割

三曰正切與全數若全數與餘切

以上三法皆本弧皆三率連比例而以全數為中率

四曰正弦與餘弦若全數與餘切

五曰餘弦與正弦若全數與正切

六曰正割與正切若全數與正弦

七曰餘割與餘切若全數與餘弦

八曰正割與餘割若全數與餘切

九曰餘割與正割若全數與正切

以上六法亦皆本法而皆四率斷比例四率之内

有一率為全數

互視共十二

一曰正弦與正切若餘切與餘割

二曰餘弦與餘切若正切與正割

三曰正弦與餘弦若正割與餘割

以上三法亦皆本弧皆四率斷比例而不用全數

然以四率之一與四二與三相乘則其兩矩內形

皆各與全數自乘之方形等

四曰此弧之正弦與他弧正弦若他弧之餘割與此弧餘割

五曰此弧之正弦與他弧餘弦若他弧之正割與此弧餘割

六曰此弧之正弦與他弧正切若他弧之餘切與此弧餘割

七曰此弧之餘弦與他弧餘弦若他弧之正割與此弧正割

八曰此弧之餘弦與他弧正弦若他弧之餘割與此弧正割

九曰此弧之餘弦與他弧餘切若他弧之正切與此弧正割

十曰此弧之正切與他弧正切若他弧之餘切與此弧餘切

十一曰此弧之正切與他弧正弦若他弧之餘割與此弧餘切

十二曰此弧之正切與他弧餘弦若他弧之正割與此弧餘切

以上九法皆兩弧相當率也其為四率斷比例而不用全數則同若以四率之一與四二與三相乘其矩内形亦各與全數自乘之方形等

相當法錯綜之理

| | 一法 | 更之 | 二法 | 更之 | 三法 | 更之 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 首率 | 正弦 | 餘割 | 餘弦 | 正割 | 正切 | 餘切 |
| 中率 | 全 | 全 | 全 | 全 | 全 | 全 |
| 末率 | 餘割 | 正弦 | 正割 | 餘弦 | 餘切 | 正切 |

此三率連比例也首率與中率之比例若中率與末率

故以首率末率相乘即與中率自乘之積等

假如三十度之正弦〇五〇〇〇〇與全數一〇〇〇〇〇之比例若

全數一〇〇〇〇〇與三十度之餘割二〇〇〇〇〇其比例皆為加例也更之則餘割二〇〇〇〇〇與全數一〇〇〇〇〇若全數一〇〇〇〇〇與正弦〇五〇〇〇〇其比例為折半也

又如三十度之餘弦〇八六六〇三與全數一〇〇〇〇〇若全數一〇〇〇〇〇與三十度之正割一一五四七〇更之則正割一一五四七〇與全數一〇〇〇〇〇若全數一〇〇〇〇〇與餘弦〇八六六〇三也

又如三十度之正切〇五七七三五與全數一〇〇〇〇〇若全數一〇〇〇〇〇與三十度之餘切一七三二〇五更之則餘切一七三二〇五與

全數一〇〇〇〇〇若全數一〇〇〇〇〇與正切〇五七七三五也

用法

凡三率連比例有當用首率與中率者改為中率與末率假如有四率其一三十度正弦其二全數改用全數為一率三十度餘割為二率其比例同

| 四法 | 更之 | 又更 又更 | 反之 更之 | 又更 又更 |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 一 | 正弦 | 餘切 | 餘弦 | 全 |
| 二 | 餘弦 全 | 全 餘弦 | 餘切 正弦 | 正弦 餘切 |

| 三 | 全 餘弦 | 餘弦 全 | 正弦 餘切 | 餘切 正弦 |
|---|---|---|---|---|
| 四 | 餘切 | 正弦 | 全 | 餘弦 |

凡四率之前後兩率矩內形與中兩率矩形等故一與四二與三可互居也

| 五法 | 更之 | 又更 又更 | 反之 更之 | 又更 又更 |
|---|---|---|---|---|
| 一 | 餘弦 | 正切 | 正弦 | 全 |
| 二 | 正弦 全 | 全 正弦 | 正切 餘弦 | 餘弦 正切 |
| 三 | 全 正弦 | 正弦 全 | 餘弦 正切 | 正切 餘弦 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 四 | 正切 | 餘弦 | 全 | 正弦 |
| 六法 | 更之 | 又更 又更 | 反之 更之 | 又更 又更 |
| 一 | 正割 | 正弦 | 正切 | 全 |
| 二 | 正切 全 | 全 正切 | 正弦 正割 | 正割 正弦 |
| 三 | 全 正切 | 正切 全 | 正割 正弦 | 正弦 正割 |
| 四 | 正弦 | 正割 | 全 | 正切 |
| 七法 | | | | |
| 一 | 餘割 | 餘弦 | 餘切 | 全 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 二 | 餘切　全 | 全　餘切 | 餘弦　餘割 | 餘割　餘弦 |
| 三 | 全　餘切 | 餘切　全 | 餘割　餘弦 | 餘弦　餘割 |
| 四 | 餘弦 | 餘割 | 全 | 餘切 |

八法

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 一 | 正割 | 餘切 | 餘割 | 全 |
| 二 | 餘割　全 | 全　餘割 | 餘切　正割 | 正割　餘切 |
| 三 | 全　餘割 | 餘割　全 | 正割　餘切 | 餘切　正割 |
| 四 | 餘切 | 正割 | 全 | 餘割 |

九法

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 一 | 餘割 | 正切 | 正割 | 全 |
| 二 | 正割 全 | 全 正割 | 正切 餘割 | 餘割 正切 |
| 三 | 全 正割 | 正割 全 | 餘割 正切 | 正切 餘割 |
| 四 | 正切 | 餘割 | 全 | 正割 |

右四率斷比例也一率與二率之比例若三率與四率

假如三十度之正弦〇五〇〇〇〇與其餘弦〇八六六〇三若全數一〇〇〇〇〇與其餘切一七三二〇五更之則餘切一七三二〇五與全數

一〇〇〇〇〇若餘弦〇八六六〇三與正弦〇五〇〇〇〇也第四法

又如三十度之正割一一五四七〇若全數一〇〇〇〇〇與其正弦〇五〇〇〇〇更之則全數一〇〇〇〇〇與正割一一五四七〇若正弦〇五〇〇〇〇與正切〇五七七三五也第六法

又如三十度之餘割二〇〇〇〇〇與其正割一一五四七〇若全數一〇〇〇〇〇與其正切〇五七七三五更之則正切〇五七七三五與正割一一五四七〇若全數一〇〇〇〇〇與餘割二〇〇〇〇〇也第九法餘倣此

## 用法

凡四率斷比例當用前兩率者可以後兩率代之假如有四率其一正弦其二餘弦改用全數為一率餘切為二率其比例同

互視

| 法 | 一 | 二 | 三 | 四 |
|---|---|---|---|---|
|  | 正弦 | 正切 | 餘切 | 餘割 |
| 更之 |  | 餘切 | 正切 |  |
|  | 餘割 | 餘切 | 正切 | 正弦 |
| 又更 |  |  |  |  |
| 又更 |  | 正切 | 餘切 |  |
|  | 正切 | 餘割 | 正弦 | 餘切 |
| 反之 |  |  |  |  |
| 更之 |  | 正弦 | 餘割 |  |
|  | 餘切 | 正弦 | 餘割 | 正切 |
| 又更 |  |  |  |  |
| 又更 |  | 餘割 | 正弦 |  |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 二法 | 更之 | 又更　又更 | 反之　更之 | 又更　又更 |
| 一 | 餘弦 | 正割 | 餘切 | 正切 |
| 二 | 餘切　正切 | 正切　餘切 | 正割　餘弦 | 餘弦　正割 |
| 三 | 正切　餘切 | 餘切　正切 | 餘弦　正割 | 正割　餘弦 |
| 四 | 正割 | 餘弦 | 正切 | 餘切 |
| 三法 | 更之 | 又更　又更 | 反之　更之 | 又更　又更 |
| 一 | 正弦 | 餘割 | 餘弦 | 正割 |
| 二 | 餘弦　正割 | 正割　餘弦 | 餘割　正弦 | 正弦　餘割 |

| 三 | 正割 餘弦 | 餘弦 正割 | 正弦 餘割 | 餘割 正弦 |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 四 | 餘割 | 正弦 | 正割 | 餘弦 |

此本弧中互相視之率也其第一與第四相乘矩第二與第三相乘矩皆與全數自乘方等故其邊為互相視之邊而相與為比例皆等

假如三十度之正弦○五○○○○與其餘割二○○○○○相乘一○○○○○○○○○○其餘弦○八六六○三與其正割一一五四七○相乘一○○○○○○○○○弱皆與全數自乘之方等故以正弦為一率餘弦

為二率正割為三率餘割為四率則正弦○五○○○○與餘弦○八六六○三若正割一一五四七○與餘割二○○○○○也第三法

又如三十度之正切○五七七三五與其餘切一七三二○五相乘一○○○○○○○弱亦與全數之方等故以正弦為一率餘切為二率正切為三率餘割為四率則正弦○五○○○○與正切○五七七三五若餘切一七三二○五與餘割二○○○○○也第一法

或以餘弦為一率餘切為二率正切為三率正割為四率則餘弦○八六六○三與餘切一七三二○五若正切○五七七三五與正

割一一五四七〇也第二法

用法

此亦四法斷比例故當用前兩率者可以後兩率代之

假如有四率當以正弦與正切為一率二率者改用餘切為一率餘割為二率以乘除之其比例亦同餘倣此

本弧諸線相當約法

其一為弦與股之比例　反之則如股與弦

全　正割　餘切　餘割　全　餘弦　正切　正弦

正弦　正切　餘弦　全　餘割　餘切　正割　全

其二為弦與句之比例　反之則如句與弦

全　餘割　正切　正割　全　正弦　餘切　餘弦

餘弦　餘切　正弦　全　正割　正切　餘割　全

其三為句與股之比例　反之則如股與句

全　餘弦　餘割　餘切　全　正割　正弦　正切

正切　正弦　正割　全　餘切　餘割　餘弦　全

右括本弧七十八法

辛 丁
庚
乙 己
丙 戊 甲

如圖甲丙甲乙甲丁皆半徑全數乙丙為正弧乙丁為餘弧乙戊為正弦庚丙為正切線庚甲為正割線乙己為餘弦辛丁為餘切線辛甲為餘割線

甲乙全數與乙戊正弦
庚甲正割與庚丙正切
辛甲餘割與甲丁全數
皆如弦與股

甲乙全數與乙已餘弦
辛甲餘割與辛丁餘切
庚甲正割與甲丙全數
皆如弦與句

甲丙全數與庚丙正切
甲戊餘弦與乙戊正弦
辛丁餘切與甲丁全數
皆如句與股

此皆一定比例觀圖自明

外有餘切餘弦非弦與股之比例則借第二比例更之

一　甲乙全數（即甲丁）　辛丁餘切

二　乙巳餘弦　　　　　乙巳餘弦

三　辛甲餘割　　更之　辛甲餘割

四　辛丁餘切　　　　　甲丁全數

全數與餘弦若餘割與餘切更之而餘切與餘弦

若餘割與全數也餘割與全數既為弦與股則餘
切與餘弦亦如弦與股矣

正切正弦非弦與句之比例則借第一比例更之

一　甲乙全數即甲丙　　庚丙正切

二　乙戊正弦　　乙戊正弦

更之

三　庚甲正割　　庚甲正割

四　庚丙正切　　甲丙全數

全數與正弦若正割與正切更之而正切與正弦

若正割與全數也正割與全數既為弦與句則正切與正弦亦如弦與句矣

餘割正割非句與股之比例則仍借第一比例更之

一 餘割辛甲 餘割辛甲

二 全數甲丁即甲丙 正割庚甲

三 正割庚甲 全數甲丙

四 正切庚丙 正切庚丙

餘割與全數若正割與正切更之而餘割與正割

若全數與正切也全數與正切既爲句與股則餘割與正割亦如句與股矣

互視自此而分以前爲本弧所用共大法三更之則二十有四合相當法則七十有八而總以三率連比例三大法為根

以後為兩弧所用共大法九更之七十有二而仍以本弧之三率連比例為根

| 四法 | 一 | 二 |
| --- | --- | --- |
| 更之 | 正弦 | 他正弦 他餘割 |
| 又更 又更 | 餘割 | 他餘割 他正弦 |
| 反之 更之 | 他正弦 | 餘割 正弦 |
| 又更 又更 | 他餘割 | 正弦 餘割 |

| 三 | 他餘割 他正弦 | 他正弦 他餘割 | 正弦 餘割 | 餘割 正弦 |
|---|---|---|---|---|
| 四 | 餘割 | 正弦 | 他餘割 | 他正弦 |
| 五法 | 更之 | 又更 又更 | 反之 更之 | 又更 又更 |

| 一 | 正弦 | 餘割 | 他餘弦 | 他正割 |
|---|---|---|---|---|
| 二 | 他餘弦 他正割 | 他正割 他餘弦 | 餘割 正弦 | 正弦 餘割 |
| 三 | 他正割 他餘弦 | 他餘弦 他正割 | 正弦 餘割 | 餘割 正弦 |
| 四 | 餘割 | 正弦 | 他正割 | 他餘弦 |
| 六法 | 更之 | 又更 又更 | 反之 更之 | 又更 又更 |

| 一 | 二 | 三 | 四 |
|---|---|---|---|
| 正弦 | 他正切<br>他餘切 | 他餘切<br>他正切 | 餘割 |
| 餘割 | 他餘切<br>他正切 | 他正切<br>他餘切 | 正弦 |
| 他正切 | 餘割<br>正弦 | 正弦<br>餘割 | 他餘切 |
| 他餘切 | 正弦<br>餘割 | 餘割<br>正弦 | 他正切 |

以上大法三更之二十有四是以本弧之正弦餘割與他弧互視

七法

| 一 | 二 |
|---|---|
| 餘弦 | 他餘弦<br>他正割 |
| 正割 | 他正割<br>他餘弦 |
| 他餘弦 | 正割<br>餘弦 |
| 他正割 | 餘弦<br>正割 |

| 三 | 他正割　他餘弦 | 他餘弦　他正割 | 餘弦　正割 | 正割　餘弦 |
|---|---|---|---|---|
| 四 | 正割 | 餘弦 | 他正割 | 他餘弦 |

| 八法 | 更之 | 又更　又更 | 反之　更之 | 又更　又更 |
|---|---|---|---|---|
| 一 | 餘弦 | 正割 | 他正弦 | 他餘割 |
| 二 | 他正弦　他餘割 | 他餘割　他正弦 | 正割　餘弦 | 餘弦　正割 |
| 三 | 他餘割　他正弦 | 他正弦　他餘割 | 餘弦　正割 | 正割　餘弦 |
| 四 | 正割 | 餘弦 | 他餘割 | 他正弦 |

九法

| | 一 | 二 | 三 | 四 |
|---|---|---|---|---|
| | 餘弦 | 他餘切 他正切 | 他正切 他餘切 | 正割 |
| | 正割 | 他正切 他餘切 | 他餘切 他正切 | 餘弦 |
| | 他餘切 | 正割 餘弦 | 餘弦 正割 | 他正切 |
| | 他正切 | 餘弦 正割 | 正割 餘弦 | 他餘切 |

以上大法三更之二十有四是以本弧之餘弦正割與他弧互視

| 十法 | 一 | 二 |
|---|---|---|
| 更之 | 正切 | 他正切 他餘切 |
| 又更 又更 | 餘切 | 他餘切 他正切 |
| 反之 更之 | 他正切 | 餘切 正切 |
| 又更 又更 | 他餘切 | 正切 餘切 |

三　他餘切　他正切　他正切　他餘切　正切　餘切　餘切　正切

四　餘切　正切　他餘切　他正切

十一法　更之　又更　又更　反之　更之　又更　又更

一　正切　餘切　他正弦　他餘割

二　他正弦　他餘割　他餘割　他正弦　餘切　正切　正切　餘切

三　他餘割　他餘弦　他正弦　他餘割　正切　餘切　餘切　正切

四　餘切　正切　他餘割　他正弦

十二法

| 一 | 正切 | 餘切 | 他餘弦 | 他正割 |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 二 | 他餘弦 他正割 | 他正割 他餘弦 | 餘切 正切 | 正切 餘切 |
| 三 | 他正割 他餘弦 | 他餘弦 他正割 | 正切 餘切 | 餘切 正切 |
| 四 | 餘切 | 正切 | 他正割 | 他正弦 |

以上大法三更之二十有四是以本弧之正切餘切與他弧互視

此皆兩弧中互相視之率也本弧有兩率相乘矩與全數之方等他弧亦有兩率相乘矩與前數之方等則此四率為互相視之邊互相視者此有一率羸于彼之一

率若干倍則此之又一率必朒于彼之又一率亦若干倍而其比例皆相等故以此弧之兩率為一與四則以他弧之兩率為二與三

假如有角三十度邊四十度此兩弧也角之正弦○五○○○○與其餘割二○○○○○相乘一○○○○○○○○○與全數自乘等邊之正弦○六四二七九與其餘割一五五五七二相乘一○○○○○○○○弱亦與全數自乘等則此四率為互相視之邊互相視者言角之正弦○五○○○○與邊之正弦○六四二七九若邊之餘割

一五五五七二與角之餘割二〇〇〇〇〇也第四法

又如有二邊大邊五十度小邊三十度大邊之正弦〇七六六〇四餘割一三〇五四一相乘與全數自乘等小邊之正切〇五七七三五餘切一七三二〇五相乘亦與全數自乘等則此四者互相視互相視者言大邊之正弦〇七六六〇四與小邊之正切〇五七七三五若小邊之餘切一七三二〇五與大邊之餘割一三〇五四一也第六法

又如有兩角甲角三十度乙角五十度此亦兩弧也甲

角之正切〇五七七三五餘切一七三二〇五相乘與全數自乘等乙角之正切一一九一七五餘切〇八三九一〇相乘亦與全數自乘等則此率為互相視之邊互相視者言甲角之正切〇五七七三五與乙角之正切一一九一七五若乙角之餘切〇八三九一〇與甲角之餘切一七三二〇五也第十法

用法

假如別有四率以五十度正弦為第一三十度正切為第二今改用三十度餘切第一五十度餘割第二其比例同

兩弧相當約法 括互視七十二法

酉 未 卯 丁
庚
壬 丑
辛 乙 己
丙 戊 癸 甲

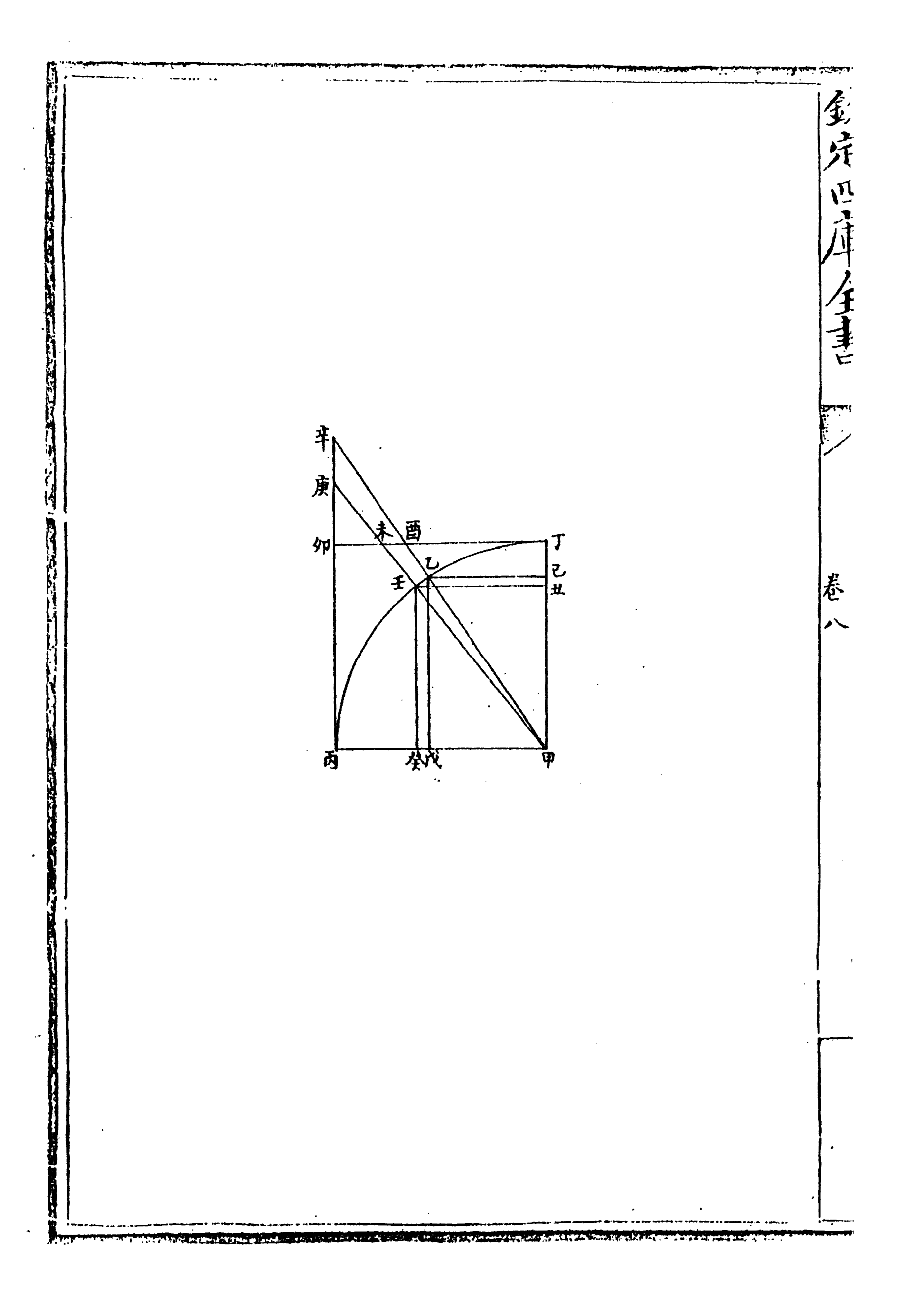
如圖壬丙為本弧乙丙為他弧他弧小於本弧而並在半象限以内

本弧　正弦壬癸　餘弦壬丑　正切庚丙
　　　餘割未甲　正割庚甲　餘切未丁

他弧　正弦乙戊　餘弦乙巳　正切辛丙
　　　餘割酉申　正割辛甲　餘切酉丁

論曰甲丙甲丁皆半徑乃本弧他弧所共也半徑自乘之方冪為甲丙卯丁而本弧中以正弦乘餘割以餘弦乘正割以正切乘餘切所作矩形既各與半徑方冪等則他弧亦然故可以互相視而成相當之率

如上圖壬丙本弧在半象限內已丙他弧在半象限外亦同


辛
庚
未
酉
卯
丁
乙
己
壬
丑
丙
癸
戊
甲

如上圖壬丙本弧小于乙丙他弧而並在半象限外並

同

歷算全書卷八

欽定四庫全書

子部

曆算全書卷十九

詳校官欽天監天文生臣賈德輔

靈臺郎臣倪廷梅覆勘

總校官編修臣王燕緒

校對官五官靈臺郎臣陳際新

謄録監生臣李大猷

繪圖監生臣劉秉仁

小引

環中黍尺者所以明平儀弧角正形乃天外觀天之法而渾天之畫影也天圜而動無晷刻停而六合以內經緯歷然亘萬古而不變此即常靜之體也人惟囿於其中不惟常動者不能得其端倪即常靜之體所為經緯歷然者亦無能擬諸形容惟置身天外以平觀大圜之立體則周天三百六十經緯之度擘劃分明皆能變渾體為平面而寫諸片楮按度攷之若以玻瓈水晶通明

之質琢成渾象而陳之几案也又若有鏤空玲瓏之渾儀取影於燭而惟肖也故可以算法證儀亦可以量法代算可以獨喻可以衆曉平儀弧角之用斯其妙矣庚辰中秋鼎偶需寒疾諸務屏絶展轉牀褥間斗室虚明心閒無寄秋光入户秋夜彌長平時測算之緒來我胸臆積思所通引伸觸類乃知歴書中斜弧三角矢線加減之圖特以推明算理故為斜望之形其弧線與平面相離聊足以彷彿意象啓人疑悟而不可以實度比量

固不如平儀之經緯皆爲實度弧角悉歸正形可以算即可以量爲的確而簡易也病間録枕上之所得輙成小帙然思之所引無方而筆之所追未能什一庶存大致竢同志之講求耳此第一卷原序也餘詳目録

康熙三十有九年重九前七日勿菴力疾書時年六十有八